37. Zeigen Sie, dass die Folge $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$, gegeben durch

$$a_n := \frac{n^2 - 3n + (-1)^n}{3n^2 - 7n + 5},$$

konvergiert und geben Sie den Grenzwert a an. Geben Sie ausserdem für alle $\varepsilon > 0$ ein N_ε an, sodass für alle $n \geq N_\varepsilon$ gilt, dass $|a_n - a| < \varepsilon$.

38. Es sei $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ eine Folge reeller Zahlen. Entscheiden Sie, unter Annahme von (a) respektive (b), ob $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ konvergiert.

    (a) $(a_{2n})_n$, $(a_{4n-1})_n$ und $(a_{4n+1})_n$ sind konvergent.

    (b) $(a_{2n})_n$, $(a_{2n-1})_n$ und $(a_{3n})_n$ sind konvergent.

39. Untersuchen Sie die folgenden Reihen auf Konvergenz

    a) $$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{2n^2 + n + 1}{3n^3 + n^2 + 3}$$

    b) $$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{6n^2 + 4}{14n^4 - 3n}$$

    c) $$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(2n)!}{2^n (n!)^2}$$

    d) $$\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \frac{\sqrt{n}}{n+1}$$

40. Sei $b \geq 2$ eine natürliche Zahl. Zeigen Sie, dass jede reelle Zahl $x \in [0, 1)$ in der Form

$$x = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{x_n}{b^n}$$

geschrieben werden kann, wobei $x_n \in \{0, 1, \ldots, b-1\}\ \forall n$.

41. Sind die folgenden Aussagen wahr oder falsch? Geben Sie kurze Begründungen bzw. Gegenbeispiele an.
Seien $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ und $(b_n)_{n\in\mathbb{N}}$ zwei beschränkte Folgen von reellen Zahlen. So gilt

    - Falls $a_n \geq b_n$ für fast alle n, so ist $\lim_{n\to\infty} a_n \geq \liminf_{n\to\infty} b_n$.
    - Falls b_n monoton fallend ist, so ist $\liminf_{n\to\infty} b_n = \limsup_{n\to\infty} b_n$.
    - Falls b_n monoton fallend ist und $a_n \geq b_n$ für unendlich viele n, so ist $\limsup_{n\to\infty} a_n \geq \lim_{n\to\infty} b_n$.
    - Falls $a_n > b_n$ für unendlich viele n, so ist $\limsup_{n\to\infty} a_n > \liminf_{n\to\infty} b_n$.